E.N.S.I. CHIMIE NORD 1984

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

On définit, pour chaque entier $n \geqslant 0$, un polynôme Q_n à coefficients réels, par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : Q_0(x) = 1, \qquad Q_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!}\left[x^n (1-x)^n\right]^{(n)} \qquad \text{si } n \geqslant 1$$

Dans cette dernière formule $f^{(k)}$ (k entier $\geqslant 1$) désigne la dérivée k-ième de la fonction f supposée suffisamment dérivable.

On désignera par C_n^p le nombre entier $\dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$ (n et p entiers, $0 \leqslant p \leqslant n$).

I

1° Q_n est un polynôme. Quels sont :

— son degré ?

— le coefficient de son terme de plus haut degré ?

Comparer $Q_n(x)$ et $Q_n(1-x)$.

2° Sans en calculer les valeurs, montrer que $Q_n(0)$ et $Q_n(1)$ sont non nuls; en comparer les valeurs.

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 Q_n(t)\,dt = 0 \qquad \forall n \geqslant 1.$

3° Expliciter Q_n et montrer que :

$$Q_n(x) = x^n \sum_{p=0}^{n} (-1)^p (C_n^p)^2 \left(\frac{1-x}{x}\right)^p$$

En déduire les valeurs de $Q_n(0)$ et de $Q_n(1)$, ainsi que celle de $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} (C_n^p)^2$.

4° Montrer que $|Q_n(x)| \leqslant C_{2n}^n$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$.

II

1° Calculer $\displaystyle\int_0^1 t^k\, Q_n(t)\,dt$ pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

2° En déduire que $\displaystyle\int_0^1 P(t)\, Q_n(t)\,dt = 0$ pour tout polynôme P dont le degré est strictement inférieur à n.

Inversement, soit P_n un polynôme de degré n tel que $\displaystyle\int_0^1 P(t)\, P_n(t)\,dt = 0$ pour tout polynôme P dont le degré est strictement inférieur à n. Après avoir établi l'existence d'un nombre réel α tel que le polynôme $P_n - \alpha Q_n$ ait un degré strictement plus petit que n, montrer que : $\displaystyle\int_0^1 [P_n(t) - \alpha Q_n(t)]^2\,dt = 0$ et en déduire que les polynômes Q_n sont (à un facteur près) *les seuls* qui possèdent cette propriété.

3° Calculer $\displaystyle\int_0^1 Q_m(t)\, Q_n(t)\,dt$.

.../...

III

On désignera par E_n l'espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) des polynômes dont le degré est au plus égal à n.

1° Montrer que $\{Q_0, Q_1, Q_2, ..., Q_n\}$ est une base de E_n. Calculer les coefficients a_i de la décomposition $P = \sum_{i=0}^{n} a_i Q_i$ d'un polynôme $P \in E_n$ sur cette base.

2° Décomposer sur la base précédente le polynôme $P \in E_n$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : P(x) = xQ_{n-1}(x).$$

En déduire que les polynômes Q_n satisfont à la relation de récurrence :

$$nQ_n(x) = (2n-1)(2x-1)\,Q_{n-1}(x) - (n-1)\,Q_{n-2}(x) \text{ pour } n \geqslant 2,$$

qui permet à partir de Q_0 et Q_1 de calculer de proche en proche tous les Q_n.

3° Expliciter les polynômes Q_2, Q_3, Q_4.

IV

On considère la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} Q_n(x)\, t^n$ dans laquelle $0 \leqslant x \leqslant 1$ (x est considéré ici comme un simple paramètre).

1° Montrer que son rayon de convergence R est non nul, et que pour $|t| < R$ elle définit une fonction de t :

$$f_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} Q_n(x)\, t^n \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Expliciter $f_0(t)$ et $f_1(t)$.

2° En utilisant la relation de récurrence obtenue en III, 2°, montrer que la fonction $f_x(t)$ est solution de l'équation différentielle :

$$[t^2 - 4(2x-1)\,t + 4]\,f'_x(t) + [t - 2(2x-1)]\,f_x(t) = 0$$

3° S'en servir pour expliciter la fonction $f_x(t)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$.